

2014

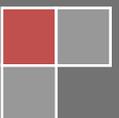
# Подготовка к ЕГЭ по математике

Теория для решения задач по  
планиметрии (B5 и B8)

Наталья и Александр Крутицких

[www.matematikalegko.ru](http://www.matematikalegko.ru)

01.01.2014

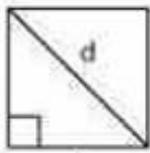


Необходимо знать все фигуры планиметрии. А также следующие понятия, формулы и теоремы:

- формулы площадей фигур (квадрат, прямоугольник, треугольник, трапеция, параллелограмм, четырёхугольник, круг, сектор круга)
- теорему Пифагора
- теорему косинусов
- теорему о сумме углов треугольника
- теорему о внешнем угле треугольника
- понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике
- процесс решения квадратного уравнения (формулы дискриминанта и корней)
- формулы связи радиусов вписанной и описанной окружности с его площадью
- формулу для нахождения длины отрезка на координатной плоскости
- формулу для нахождения координат середины отрезка
- понятие вектора, координаты вектора
- понятие модуля вектора, формулу длины вектора
- скалярное произведение векторов
- уравнение прямой, угловой коэффициент
- формулу уравнения прямой проходящей через две данные точки
- формулу Пика (знать необязательно, но желательно)
- виды треугольников
- понятие биссектрисы, медианы, высоты
- основное тригонометрическое тождество
- теорему косинусов
- тригонометрические функции и их значения
- формулы приведения
- признаки подобия треугольников
- свойства вписанных в окружность углов
- свойства четырехугольников вписанных в окружность и описанных около неё
- параллельные прямые

Формулы площадей фигур (квадрат, прямоугольник, треугольник, трапеция, параллелограмм, четырёхугольник, круг, сектор круга)

**ПЛОЩАДЬ**

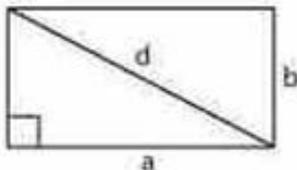


квадрат

$$S = a^2 \quad P = 4a \quad d = a\sqrt{2}$$

$P$  – сумма сторон фигуры

$d$  – длина диагонали

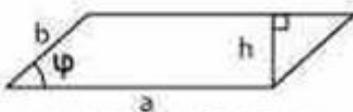


прямоугольник

$$S = a \cdot b \quad d = \sqrt{a^2 + b^2} \quad P = 2a + 2b$$

$P$  – сумма сторон прямоугольника

$d$  – длина диагонали

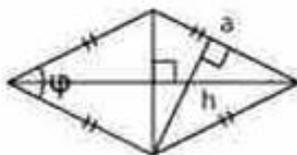


параллелограмм

$$S = a \cdot h$$

$$S = a \cdot b \cdot \sin \varphi \quad h - \text{высота}$$

$$P = 2a + 2b \quad P - \text{сумма сторон}$$

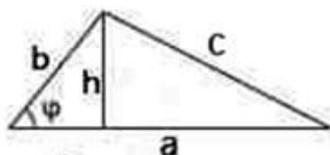


ромб

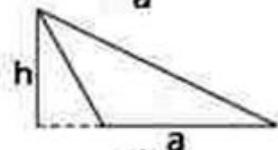
$$S = a \cdot h \quad P = 4a \quad P - \text{периметр}$$

$$S = a^2 \cdot \sin \varphi \quad h - \text{высота}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \quad d_1 \text{ и } d_2 - \text{диагонали}$$

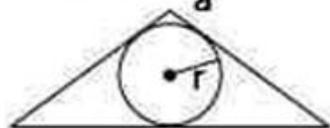


$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \quad S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \varphi$$



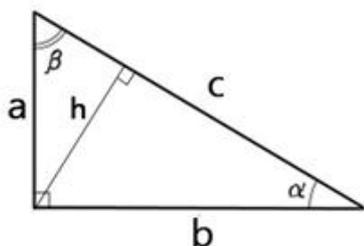
$$S = p \cdot r \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} \text{ — полупериметр}$$



$r$  — радиус вписанной окружности

треугольник



$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

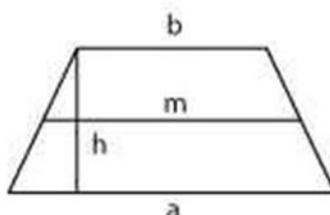
$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

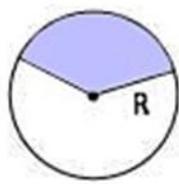


трапеция

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \quad a \text{ и } b \text{ — основания}$$

$h$  — высота

$$m = \frac{a+b}{2} \text{ — средняя линия}$$



круг

$$S = \pi R^2 \quad L = 2\pi R = \pi D$$

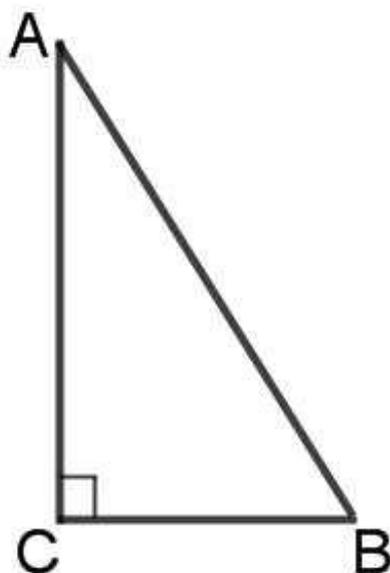
$D$  — диаметр  $L$  — длина окружности

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n \quad \text{где } n \text{ — центральный угол}$$

## Теорема Пифагора

*В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

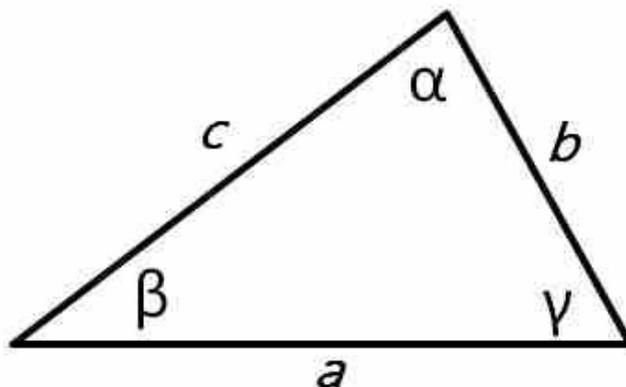
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$



Зная любые две стороны, мы можем найти третью сторону треугольника.

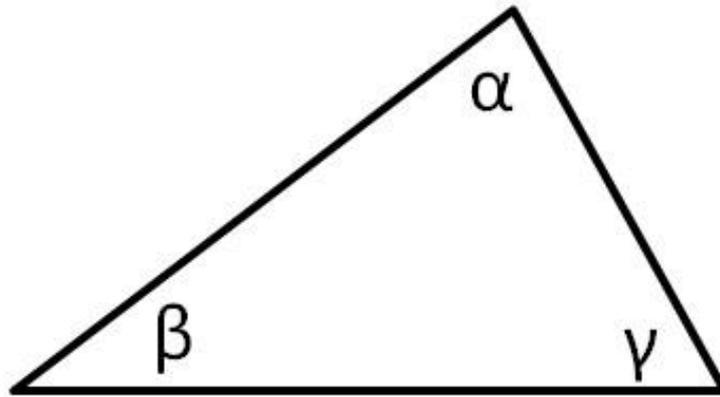
## Теорема косинусов

**Теорема:** *квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

## Сумма углов треугольника



**Теорема:** *сумма углов треугольника равна 180 градусам.*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

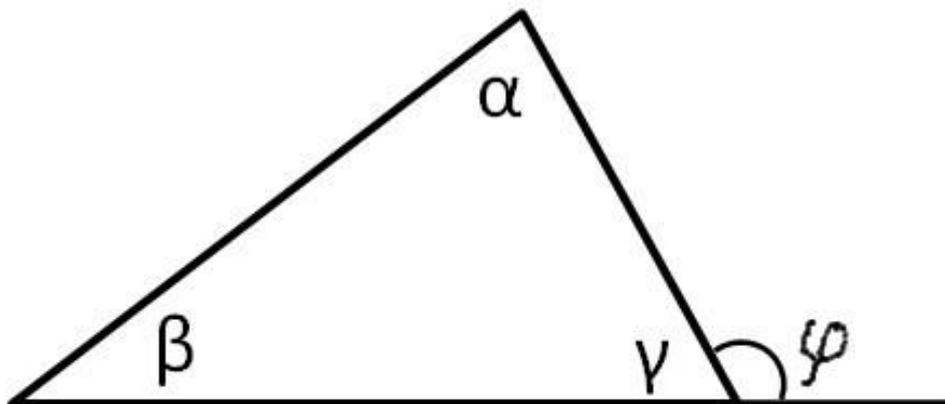
Вывод: если нам будут известны любые два угла в треугольнике, то мы всегда сможем найти третий угол.

## Теорема о внешнем угле треугольника

**Теорема:** *внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов не смежных с ним.*

Рассмотрим произвольный треугольник с углами  $\alpha$  (альфа),  $\beta$  (бетта),  $\gamma$  (гамма).

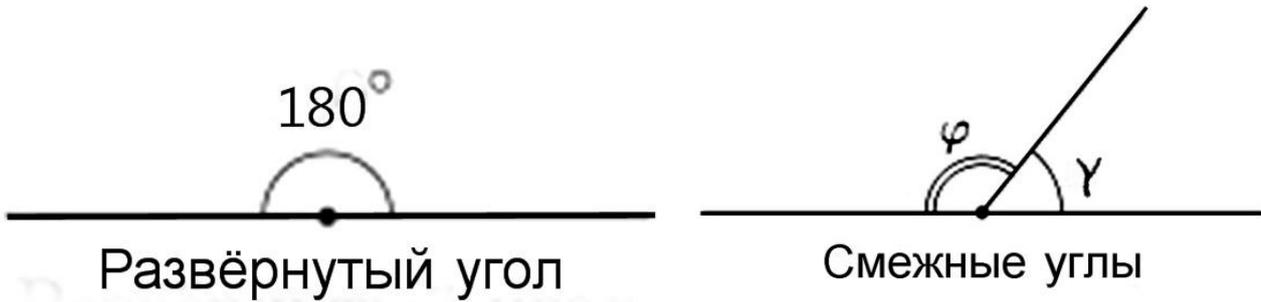
Обозначим внешний угол как  $\varphi$  (фи):



Значит по теореме:  $\varphi = \alpha + \beta$

Доказательство:

Напомним что такое развёрнутый угол, чему он равен и что такое смежные углы:



Углы  $\varphi$  и  $\gamma$  – это смежные углы,

их сумма равна  $180^\circ$ , то есть  $\gamma + \varphi = 180^\circ$  (1)

По теореме о сумме углов треугольника:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

Из неё следует, что  $180^\circ - \gamma = \alpha + \beta$ .

Из (1) следует, что  $180^\circ - \gamma = \varphi$

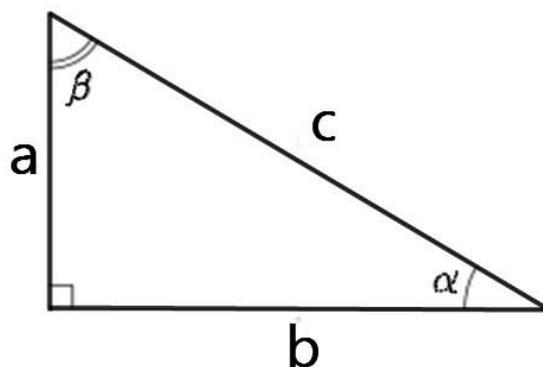
Получили  $\varphi = \alpha + \beta$ .

Теорема доказана.

*Конечно же, данная теорема скорее следствие из теоремы о сумме углов треугольника, чем «самостоятельная» теорема.*

## Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике

**Гипотенуза** прямоугольного треугольника — это сторона, лежащая напротив прямого угла. **Катеты** — стороны, лежащие напротив острых углов.



Катет  $a$ , лежащий напротив угла  $\alpha$ , называется **противолежащим** (по отношению к углу  $\alpha$ ). Другой катет  $b$ , который лежит на одной из сторон угла  $\alpha$ , называется **прилежащим**.

**Синус** острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

**Косинус** острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

**Тангенс** острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Другое (равносильное) определение – тангенсом острого угла называется отношение синуса угла к его косинусу:

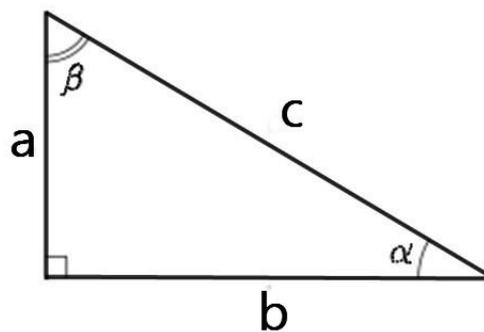
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

**Котангенс** острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение прилежащего катета к противоположному (или, что то же самое, отношение косинуса к синусу):

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Основные соотношения для синуса, косинуса, тангенса и котангенса приведены ниже, они пригодятся при решении задач:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

Таким образом, зная два-три элемента в прямоугольном треугольнике мы всегда сможем найти все остальные его элементы (углы и стороны).

## Решение квадратного уравнения (формулы дискриминанта и корней)

Квадратное уравнение (общий вид):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

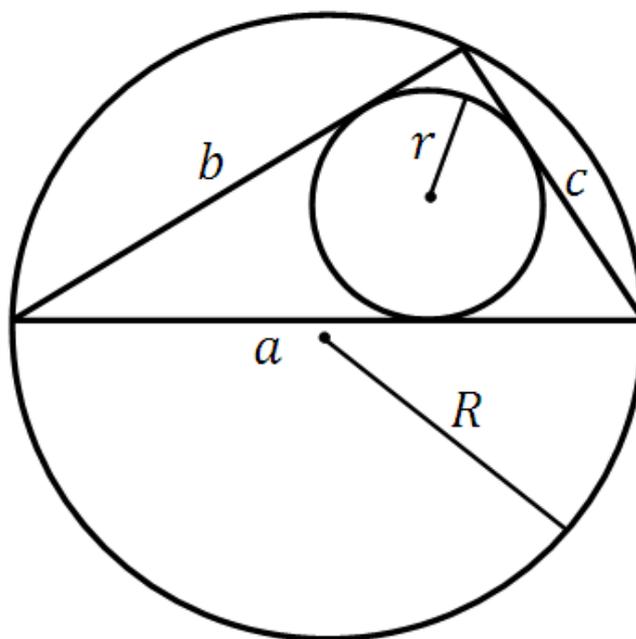
Находим дискриминант:  $D = b^2 - 4ac$ .

Находим корни уравнения по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

## Формулы площади треугольника



$$S = r \cdot \frac{a + b + c}{2} \quad \text{где } r \text{ — радиус вписанной окружности}$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \quad \text{где } R \text{ — радиус описанной окружности}$$

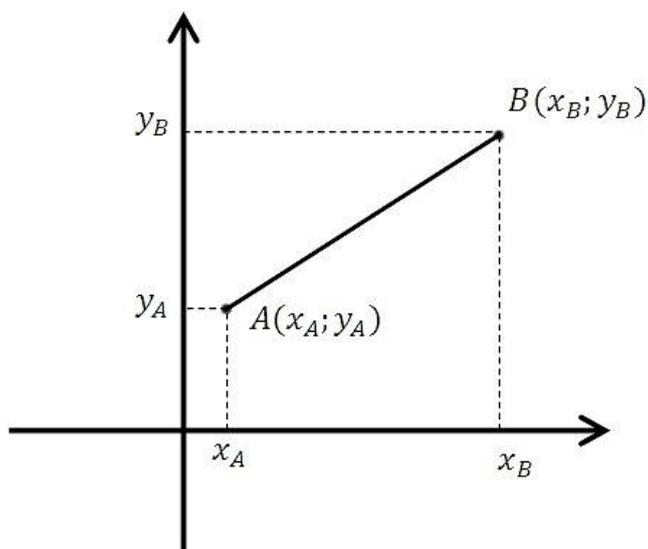
$a, b, c$  — стороны треугольника

## Формула длины отрезка на координатной плоскости

Формула для определения длины отрезка, если известны координаты его концов:

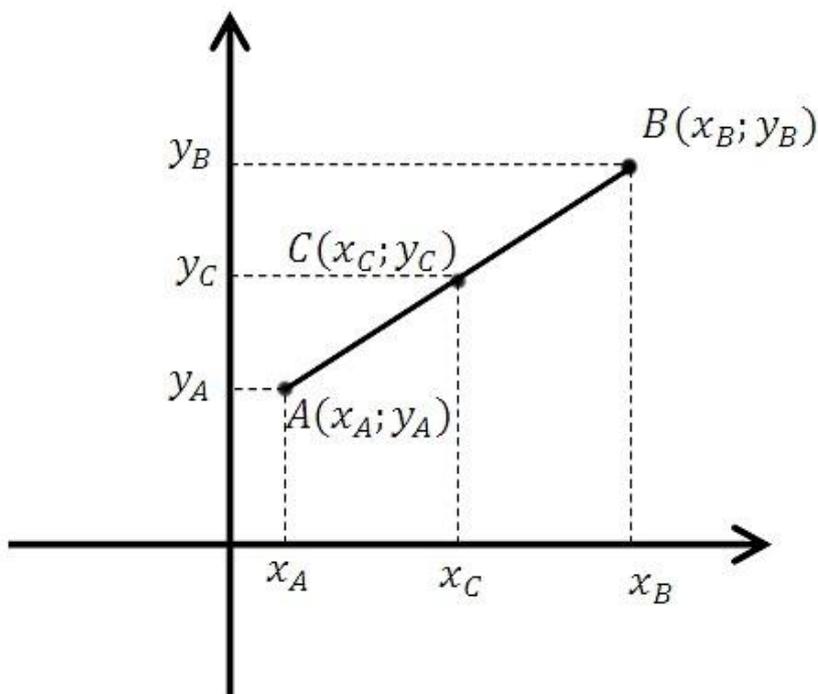
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

где  $A(x_A; y_A)$   $B(x_B; y_B)$



## Формула координат середины отрезка

Пусть точка C является серединой отрезка AB.



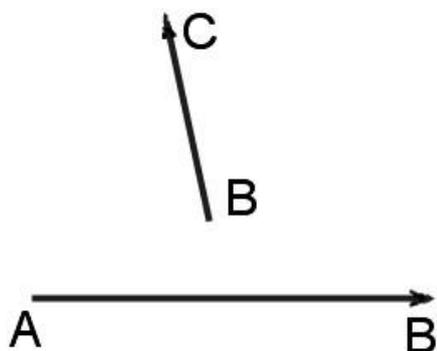
Формула для нахождения координат середины отрезка:

$$C \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$
$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$$

где  $A(x_A; y_A)$   $B(x_B; y_B)$

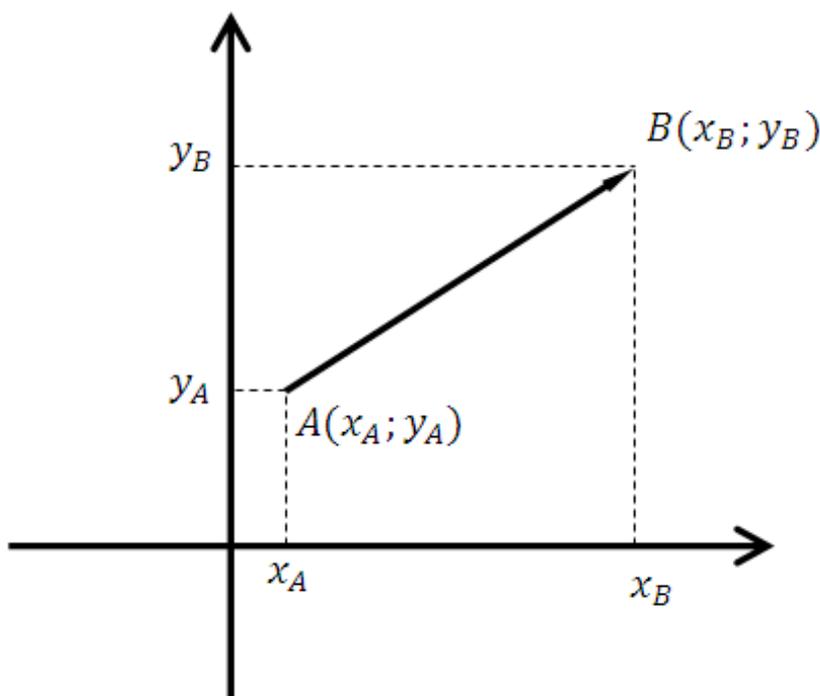
## Понятие вектора, координаты вектора.

Вектор это направленный отрезок.



Все векторы, имеющие одинаковое направление и равные по длине являются равными.

Координаты вектора.



Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат конца вычесть соответствующие координаты начала:

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A), \text{ где } A(x_A; y_A) \text{ и } B(x_B; y_B)$$

## Понятие модуля вектора, длина вектора, скалярное произведение векторов

Модулем вектора называется его длина, определяется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{где } \vec{a}(a_1; a_2)$$

Формула для определения длины вектора, если известны координаты его начала и конца:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Формулы скалярного произведения векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}}$$

То есть скалярное произведение векторов равно произведению его длин на косинус угла между ними.

Если известны координаты векторов, можем найти угол между векторами:

$$\cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

## Уравнение прямой, угловой коэффициент

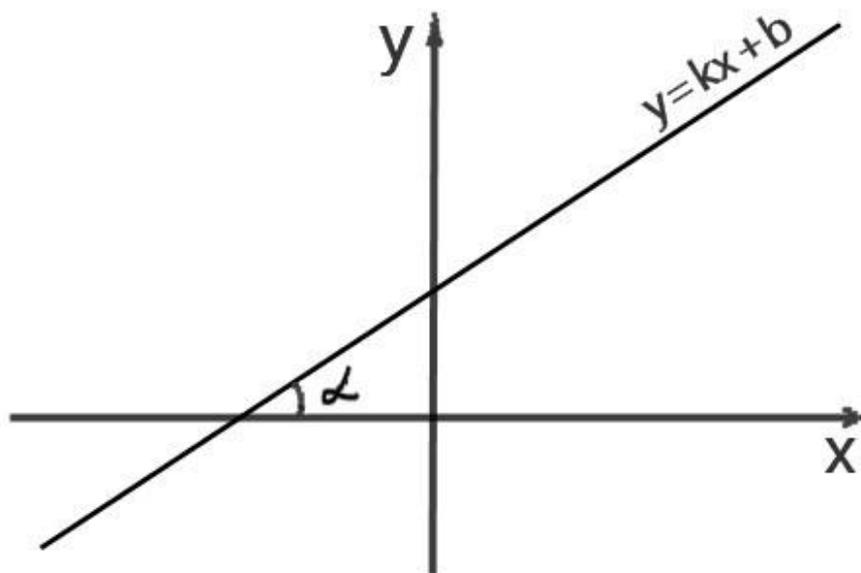
Уравнение прямой на координатной плоскости имеет вид:

$y = kx + b$ , где  $k$  это и есть угловой коэффициент прямой

$k = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  это угол между прямой и осью  $ox$

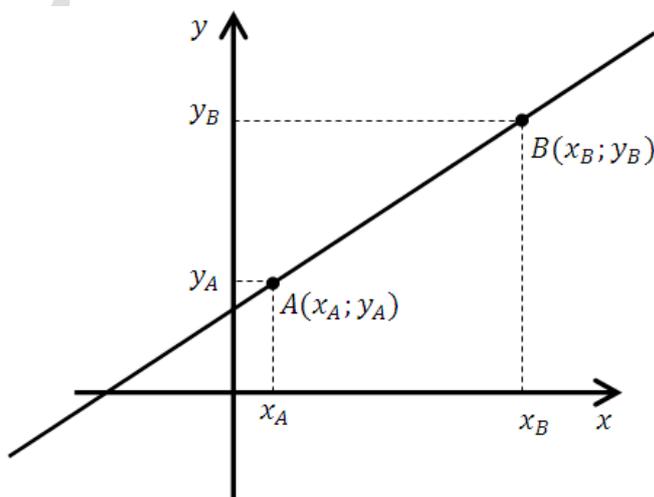
он лежит в пределах от 0 до 180 градусов

Покажем этот угол:



Уравнения прямой проходящей через две данные точки

Формула уравнения прямой проходящей через две данные точки имеет вид:



$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \quad \text{где } (x_A; y_A) \text{ и } (x_B; y_B) \text{ — координаты точек}$$

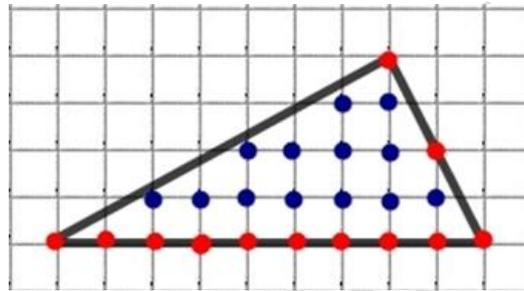
## ФОРМУЛА ПИКА (ПРИМЕР)

Площадь искомой фигуры (в данном случае рассмотрим треугольник) можно найти по формуле:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1$$

где  $M$  – количество узлов на границе треугольника  
(на сторонах и вершинах)

$N$  – количество узлов внутри треугольника



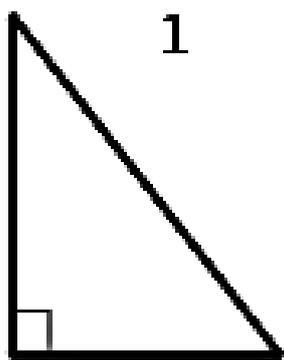
$$M = 12 \text{ (красный цвет)}$$

$$N = 13 \text{ (синий цвет)}$$

$$1 \text{ клетка} = 1 \text{ см}$$

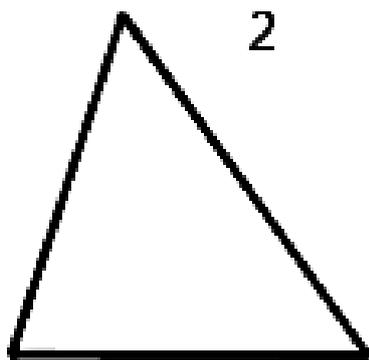
$$S = \frac{12}{2} + 13 - 1 = 18 \text{ см}^2$$

## ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



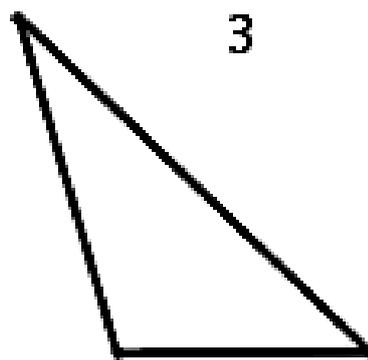
1

Прямоугольный



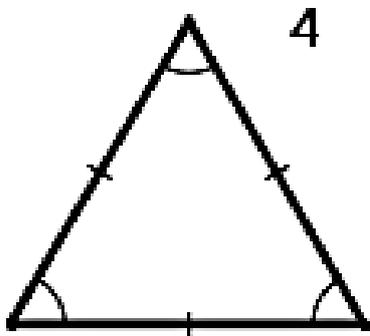
2

Остроугольный



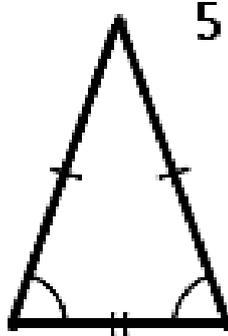
3

Тупоугольный



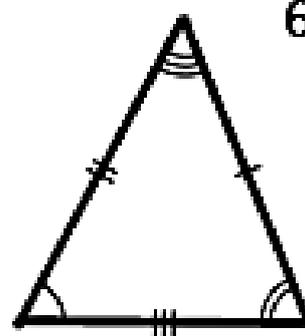
4

Равносторонний



5

Равнобедренный



6

Разносторонний

Если один из углов треугольника прямой (равен  $90^\circ$ ), то треугольник называется **прямоугольным**. Две стороны, образующие прямой угол, называются катетами, а сторона, противолежащая прямому углу, называется гипотенузой (рисунок 1).

Если все углы треугольника острые, то треугольник называется **остроугольным** (рисунок 2).

Если один из углов треугольника тупой (больше  $90^\circ$ ), то треугольник называется **тупоугольным** (рисунок 3).

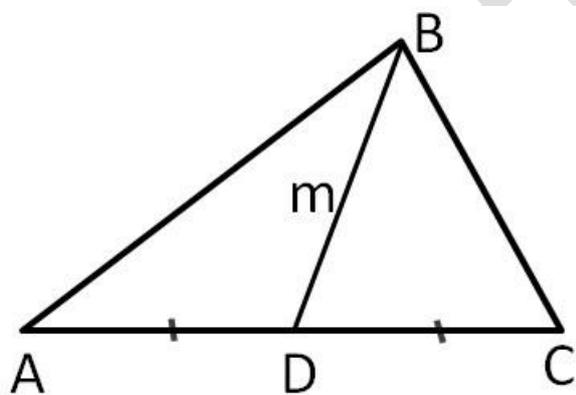
**Равносторонним** называется треугольник, у которого все три стороны равны. В равностороннем треугольнике все углы равны  $60^\circ$ , а центры вписанной и описанной окружностей совпадают (рисунок 4).

**Равнобедренным** называется треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, третья сторона называется основанием. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны (рисунок 5).

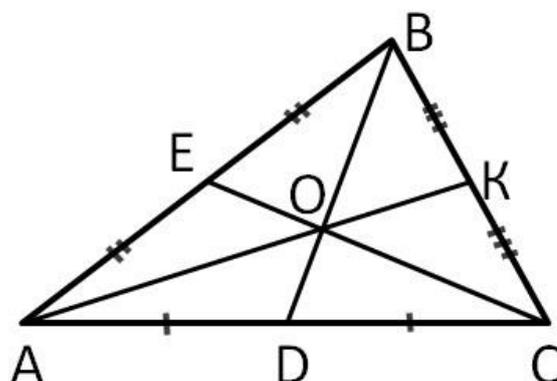
**Разносторонним** называется треугольник, у которого длины трёх сторон попарно различны (рисунок 6).

### Биссектриса, медиана, высота.

**Медианой** треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположной стороны (основанием медианы). Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка пересечения делит каждую медиану в отношении 1:2 считая от основания медианы (этот факт следует помнить).



$m$  – медиана  $AD = DC$

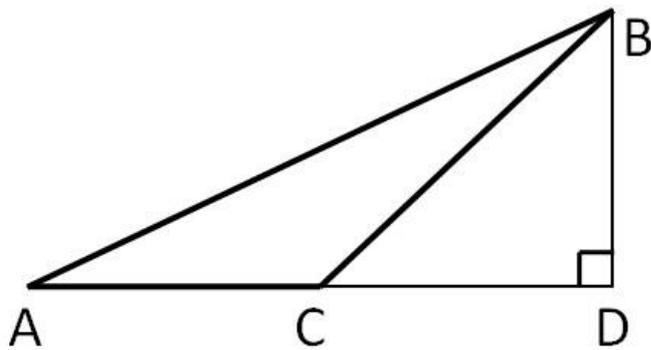
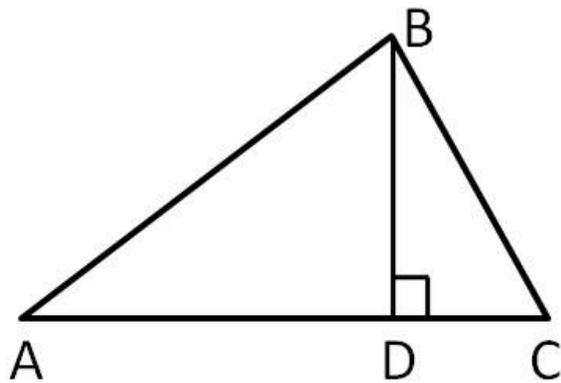


$AK, CE, BD$  – медианы

$$AO = 2 \cdot OK \quad CO = 2 \cdot OE \quad BO = 2 \cdot OD$$

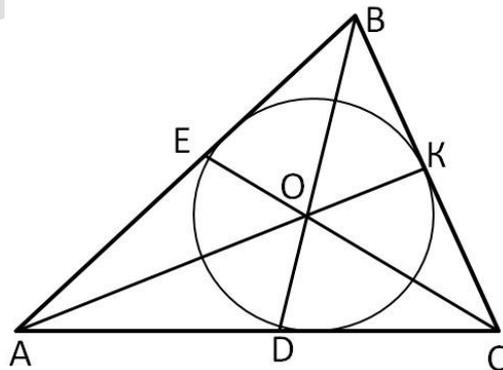
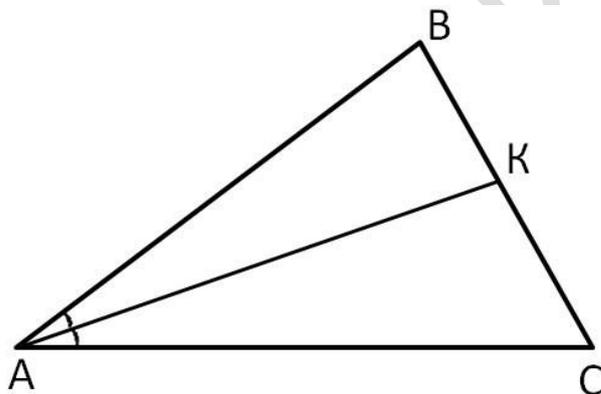
$$AE = EB \quad BK = KC \quad AD = DC$$

**Высотой** треугольника, проведённой из данной вершины, называется перпендикуляр, опущенный из этой вершины на противоположную сторону или её продолжение.



$BD$  – высота опущенная на сторону  $AC$

**Биссектрисой** треугольника, проведённой из данной вершины, называют отрезок, соединяющий эту вершину с точкой на противоположной стороне и делящий угол при данной вершине пополам. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка совпадает с центром вписанной окружности.



$AK, CE, BD$  – биссектрисы

$$\angle BAK = \angle KAC \quad \angle ADB = \angle CBD \quad \angle ACE = \angle BCE$$

$O$  – центр вписанной окружности

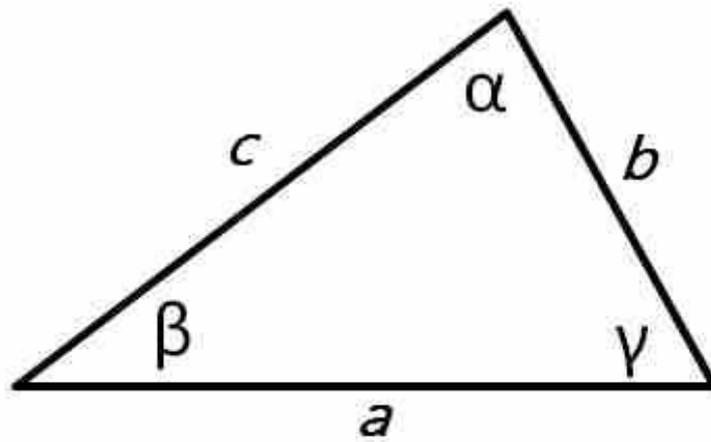
В равнобедренном треугольнике биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, совпадают. Верно и обратное: если биссектриса, медиана и высота, проведённые из одной вершины, совпадают, то треугольник равнобедренный.

## Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

## Теорема косинусов

**Теорема:** *квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.*



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Значения тригонометрических функций

Аргумент	Функция			
	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$0^\circ$ ( $0$ )	0	1	0	не определен
$30^\circ$ ( $\frac{\pi}{6}$ )	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ$ ( $\frac{\pi}{4}$ )	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ$ ( $\frac{\pi}{3}$ )	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$90^\circ$ ( $\frac{\pi}{2}$ )	1	0	не определен	0

Знание этих значений необходимо, это «азбука», без которой невозможно будет справиться с множеством заданий. Отлично, если память хорошая, вы легко выучили и запомнили эти значения. Что делать, если этого сделать не получается, в голове путаница, да просто вы именно при сдаче экзамена сбились. Обидно будет потерять бал из-за того, что вы запишите при расчётах неверное значение.

Посмотрите алгоритм, благодаря которому вы легко, в течение минуты восстановите в памяти все вышеуказанные значения:

1. Записываем в строчку углы от  $0$  до  $90$  градусов.

$$0^\circ \quad 30^\circ \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 90^\circ$$

2. Записываем слева в столбик синус и косинус аргумента:

$$0^\circ \quad 30^\circ \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 90^\circ$$

$$\sin \alpha$$

$$\cos \alpha$$

3. Напротив синуса пишем числа от нуля до четырёх (под значениями углов). Напротив косинуса от 4 до 0.

$$0^\circ \quad 30^\circ \quad 45^\circ \quad 60^\circ \quad 90^\circ$$

$\sin \alpha$	0	1	2	3	4
$\cos \alpha$	4	3	2	1	0

4. Далее извлекаем корень:

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$
$\cos \alpha$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{0}$

5. Делим на 2

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

6. Вычисляем:

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Мы получили значения синуса и косинуса углов от 0 до 90 градусов.

Тренируйтесь, проработайте данный алгоритм раз семь, процесс займёт немного времени. В будущем это вам пригодится!

Далее, зная формулы тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

вы сможете найти значения всех вышеуказанных углов.

Например:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

## Формулы приведения

Выражение Формулы «Приведения» означает приводить к простейшему виду. Ниже представлены все формулы и правила приведения. Но в задачах по планиметрии вам понадобятся только те формулы, в которых фигурируют углы 90 и 180 градусов. Тем не менее, важен сам принцип, потому здесь представлена полная информация по формулам приведения.

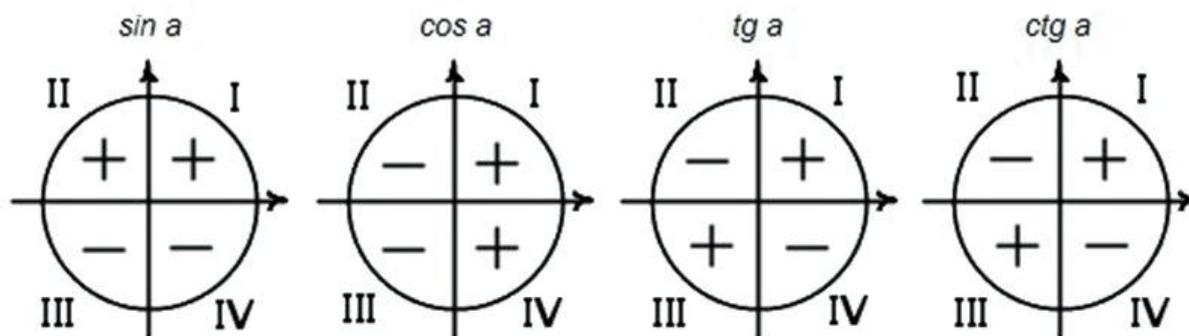
Табличная форма выражающая формулы приведения:

Функция / угол в рад.	$\pi/2 - \alpha$	$\pi/2 + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$3\pi/2 - \alpha$	$3\pi/2 + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
sin	cos $\alpha$	cos $\alpha$	sin $\alpha$	- sin $\alpha$	- cos $\alpha$	- cos $\alpha$	- sin $\alpha$	sin $\alpha$
cos	sin $\alpha$	- sin $\alpha$	- cos $\alpha$	- cos $\alpha$	- sin $\alpha$	sin $\alpha$	cos $\alpha$	cos $\alpha$
tg	ctg $\alpha$	- ctg $\alpha$	- tg $\alpha$	tg $\alpha$	ctg $\alpha$	- ctg $\alpha$	- tg $\alpha$	tg $\alpha$
ctg	tg $\alpha$	- tg $\alpha$	- ctg $\alpha$	ctg $\alpha$	tg $\alpha$	- tg $\alpha$	- ctg $\alpha$	ctg $\alpha$
Функция / угол в °	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$	$360^\circ + \alpha$

Вам не нужно учить таблицу и запоминать эти формулы. Необходимо уяснить «закон», который здесь работает:

1. Необходимо определить знак функции в соответствующей четверти.

Напомним знаки тригонометрических функций:



2. При  $90^\circ$  и  $270^\circ$  функция изменяется на кофункцию (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс)

При  $180^\circ$  и  $360^\circ$  функция на кофункцию не изменяется.

Теперь запишем формальный вид (все формулы приведения):

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
---	---

$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$
---	---

$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin \alpha$
---	--

$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
---	--

$\sin(360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(360^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
--	--

$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{tg}(360^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(360^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

В рамку заключены те формулы, которые используются в задачах.

Приведём таблицу соответствия радиан градусам (от 0 до 180 градусов):

$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$

## Признаки равенства и подобия треугольников

### Признаки равенства треугольников.

Равными называют треугольники, у которых соответствующие стороны равны.

#### Первый признак равенства треугольников:

*Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.*

#### Второй признак равенства треугольников:

*Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Третий признак равенства треугольников:

*Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Признаки подобия треугольников.

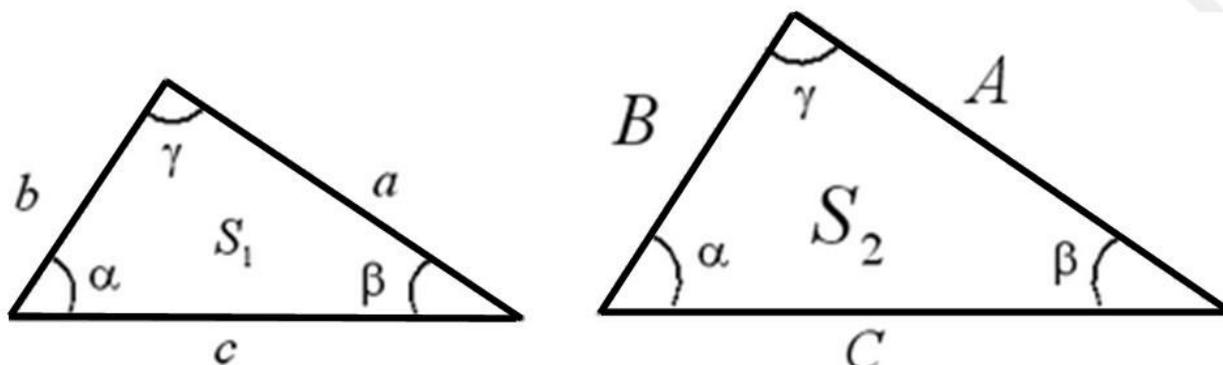
Подобными называются треугольники, у которых углы равны, а сходственные стороны пропорциональны:

$$\alpha = \beta = \gamma$$

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k$$

где  $k$  – коэффициент подобия

$$\text{То есть } A = ka \quad B = kb \quad C = kc$$



I признак подобия треугольников:

*Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то эти треугольники подобны.*

II признак подобия треугольников:

*Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

### III признак подобия треугольников:

*Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.*

Следствие: площади подобных треугольников относятся как квадрат коэффициента подобия:

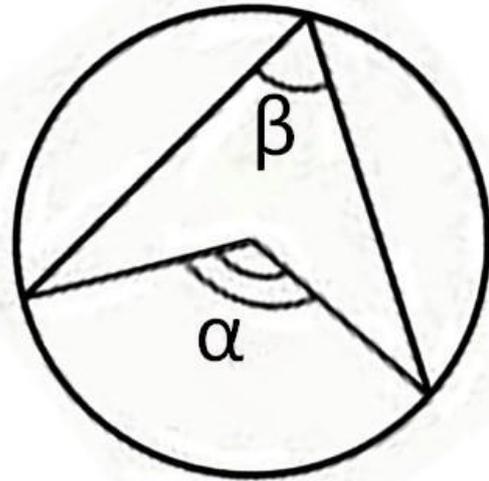
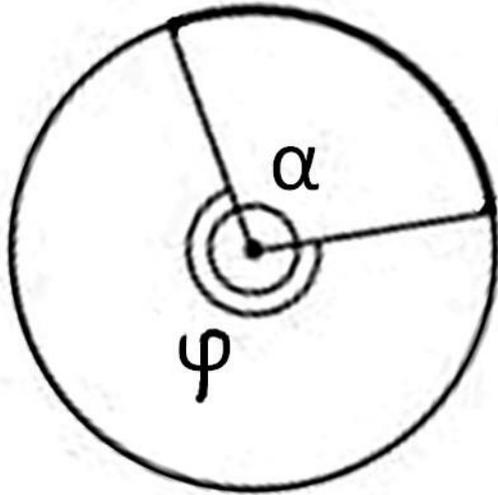
$$\frac{S_2}{S_1} = k^2$$

### Свойства вписанных в окружность углов

Вспомним, что такое центральный и вписанный угол; хорда, дуга, на которые опираются эти углы.

**Центральным углом** в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется дугой окружности. Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла.

Угол, называется **вписанным** в окружность, если вершина угла лежит на окружности, а стороны угла пересекают эту окружность.



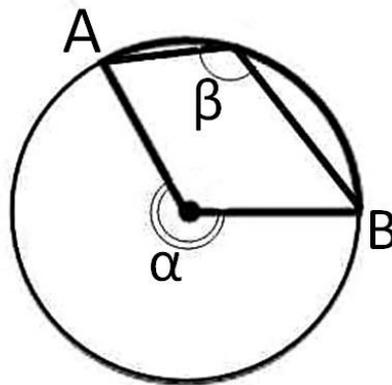
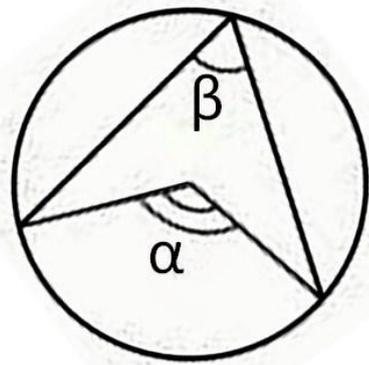
Углы  $\alpha$  и  $\varphi$  - центральные, только угол  $\varphi$  опирается на дугу, которая больше 180 градусов. Угол  $\beta$  является вписанным углом.



Отрезок соединяющий две точки окружности называется **хордой**. Самая большая хорда проходит через центр окружности и называется **диаметр**.

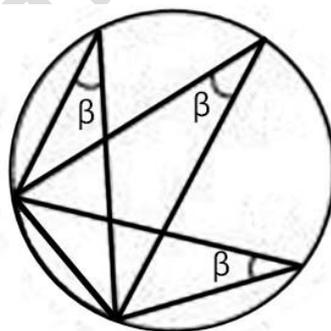
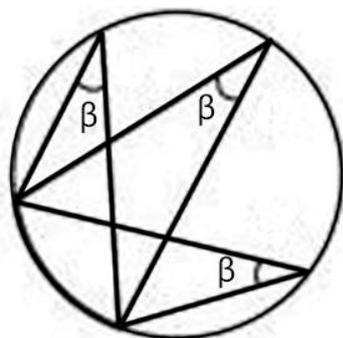
Для решения задач на вписанные в окружность углы, вам необходимо знать следующие свойства:

1. Вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу:



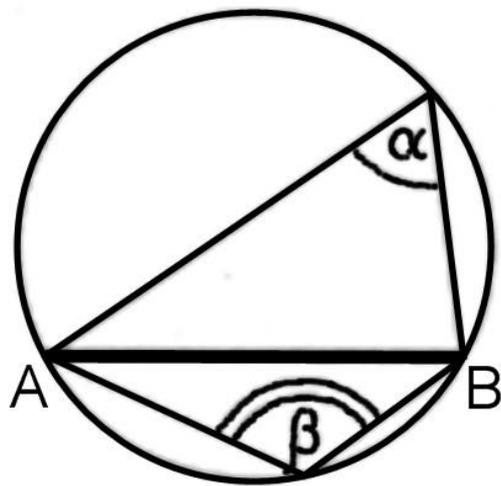
$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

2. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
3. Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по одну сторону от этой хорды, равны.



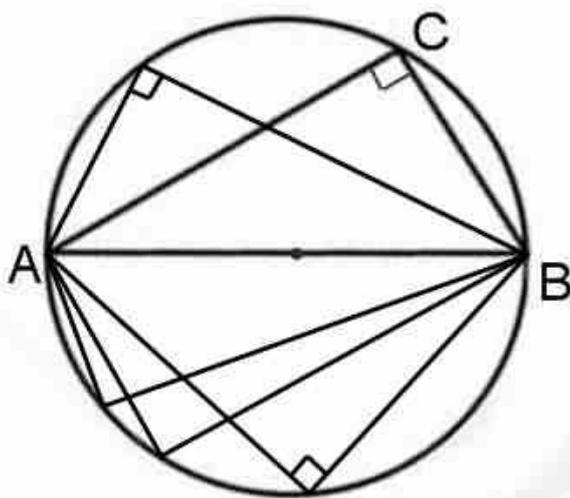
4. Любая пара углов, опирающихся на одну и ту же хорду, вершины которых лежат по разные стороны хорды, составляют в сумме  $180^\circ$ :

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



Следствие: противоположные углы четырёхугольника вписанного в окружность в сумме составляют 180 градусов, ( $\angle A + \angle B = 180^\circ$ )

5. Все вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые.



Вообще, это свойство является следствием из свойства (1), это его частный случай. Посмотрите: центральный угол равен 180 градусам (он построен на хорде, являющейся диаметром), значит по первому свойству вписанный угол равен его половине. Знание данного свойства помогает в решении многих задач и помогает избежать лишних расчётов. Запомните его (как и все остальные).

**Следствие 1:** *если в окружность вписан треугольник и одна его сторона совпадает с диаметром этой окружности, то треугольник*

является прямоугольным (вершина прямого угла лежит на окружности).

**Следствие 2:** центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой его гипотенузы.

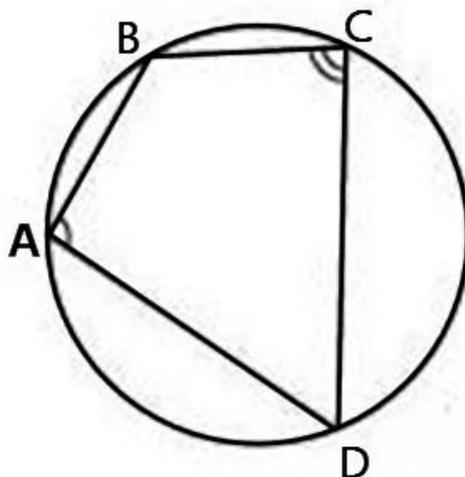
## Свойства четырехугольников вписанных в окружность и описанных около неё

**Вписанный** четырехугольник — четырехугольник, все вершины которого лежат на одной окружности.

Очевидно, эта окружность будет называться **описанной** вокруг четырехугольника.

**Описанный** четырехугольник — такой, что все его стороны касаются одной окружности. В этом случае окружность **вписана** в четырехугольник.

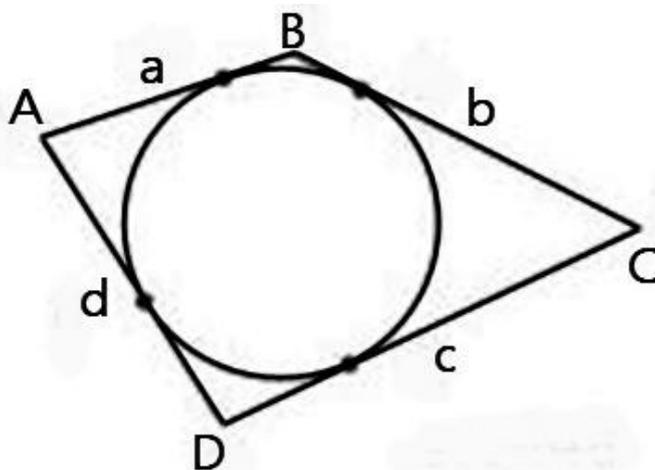
1. Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны  $180^\circ$  градусам.



$$\angle A + \angle C = 180^\circ \quad \angle B + \angle D = 180^\circ$$

То есть если мы имеем вписанный в окружность четырёхугольник, то сумма его противоположных углов равна 180 градусам.

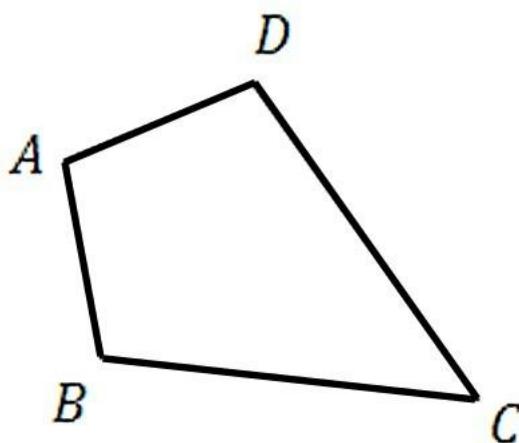
2. Четырёхугольник можно описать около окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.



$$a + c = b + d$$

То есть, если мы имеем описанный около окружности четырёхугольник, то суммы его противоположных сторон равны.

Ещё одно свойство четырёхугольника:

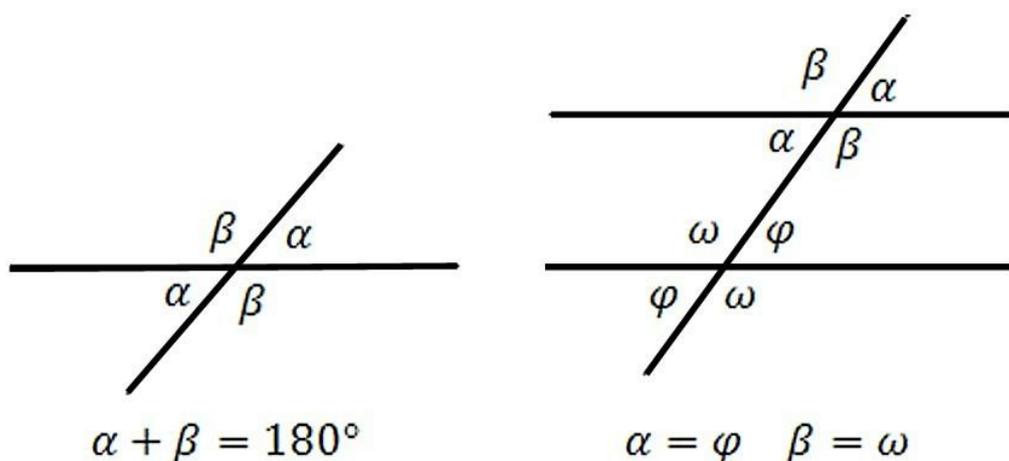


$$A + B + C + D = 360^\circ$$

## Параллельные прямые

Во многих задачах планиметрии необходимо знание элементарных фактов. Необходимо, например, помнить информацию о свойствах углов, образованных параллельными прямыми и секущей. Это пригодится при решении задач с параллелограммами, трапециями и других.

1. Соответственные и накрест лежащие углы при параллельных прямых равны.
2. Сумма односторонних углов при параллельных прямых равна  $180^\circ$ .



Дорогие друзья! Далеко не все при решении прямоугольных треугольников могут быстро сориентироваться и сразу же найти верный путь к решению. Поэтому для вас некоторые рекомендации:

1. Если в условии даны две стороны прямоугольного треугольника, сразу ищите третью по теореме Пифагора. Зная три стороны, вы всегда сможете найти тригонометрические функции как внутренних, так и внешних углов.
2. Если дано значение одной из тригонометрических функций и сторона треугольника, то используя основное тригонометрическое тождество, понятие синуса, косинуса, тангенса или котангенса ищите значение остальных тригонометрических функций. Далее вы без труда сможете найти все стороны треугольника.